

**Herhalingstentamen W5, 23 augustus 2002, 9.00 WSN 20**

1.  $U$  is een open deelverzameling van het complexe vlak  $\mathbf{C}$ .
  - (a) Geef de definitie van:  $U$  is open in  $\mathbf{C}$ .
  - (b) Geef de definitie van:  $U$  is wegsamenhangend (pathwise connected).
  - (c) Geef de definitie van:  $U$  is enkelvoudig samenhangend (simply connected).
  - (d) Is  $V := \{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| \geq 2\}$  open, wegsamenhangend, enkelvoudig samenhangend?
2. Hoe is de convergentiestraal  $r$  van  $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  gedefiniëerd? Geef machtreeksen  $F$  met convergentiestraal  $r$  gelijk aan  $0, 5, \infty$  respectievelijk.
3. Op welke deelverzamelingen  $U \subset \mathbf{C}$  is de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n$  absoluut uniform convergent? Van welke rationale functie  $f$  is  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n$  de machtreeks ontwikkeling in  $z = 0$ ?
4. Bewijs dat voor  $a > 0$  geldt  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}$ . Hint: Voor  $x \in \mathbf{R}$  is  $x \sin x$  is het imaginaire deel van  $x e^{ix}$ .
5.  $S := \{n^3 \mid n \in \mathbf{Z}, n \geq 0\}$ . Produceer een holomorfe functie  $F$  op  $\mathbf{C}$  zó dat  $S$  de verzameling van zijn nulpunten is en bovendien elk nulpunt orde 1 heeft. Hint: Weierstrass producten.
6. Bewijs dat de functie  $f(z) := \frac{z^2}{z-5}$  analytisch is in een omgeving van  $z = 0$ . Bereken expliciet de convergente machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  die in een omgeving van  $z = 0$  gelijk is aan  $f(z)$ . Bereken de convergentiestraal van die convergente machtreeks.
7. Geef een gebroken lineaire transformatie (fractional linear transformation)  $F : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  die de reële as (inclusief het punt  $\infty$ ) afbeeldt op de cirkel  $\{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| = 1\}$ . Hint: Wat is een goede keuze voor de  $F(0), F(1), F(\infty)$ ?
8. Bewijs dat de volgende reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^3}$  een meromorfe functie op  $\mathbf{C}$  definieert. Bepaal de polen en hun ordes.